1. Собственные интегралы, зависящие от параметра (ИЗП).

1 курс: $f \in C[a,b]$, $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt, F(t)$ - непр. диф. , $F'(x) = f(x)$

1. Собств. интеграл с пост. пределами интегрирования
$f(x,y)$ $\Pi = [a,b] \times [c,d]$

$F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ (1), $y \in [c,d]$

Теорема 1: Пусть $f \in C(\Pi)$. Тогда $F \in C[c,d]$ 

Доказательство: Т.к. П - компакт, то f равн. непр. на $\Pi \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall y_1, y_2 \in [c,d]\ |y_2 - y_1| < \delta\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f(x,y_2) - f(x,y_1)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$

$|F(y_2 - F(y_1))| = \left|\int\limits_a^b (f(x,y_2) - f(x,y_1))dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x,y_2) - f(x,y_1))|dx < \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{(b-a)}dx = \varepsilon \Rightarrow F$ равн. непр. на $[c,d] \Rightarrow$ F непр. на $[c,d]$

ч.т.д.

Теорема 2: Пусть f, $\frac{\partial f}{\partial y} \in$ С(П). Тогда $f \in C^1[c,d]$, причём

$F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ (2)

Доказательство: Достаточно д-ть формулу (2), т.к. по Теореме 1 $\frac{\partial f}{\partial y}$ непр. на [c, d]...

Лемма (об инт-ти собств. инт.): Пусть $g(x,y) \in C(\Pi)$. Тогда $G(y) = \int\limits_a^b g(x,y)dx$, то $\int\limits_c^y G(t)dt = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^y g(x,t)dt$ $(*), y \in [c,d]$

Доказательство: $\Pi_y = [a,b] \times [c,y]$, т.к. $g_y(x,t) \in C(\Pi_y) \Rightarrow$

$\iint\limits_{\Pi_y} g(x,t)dxdt = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^y g(x,t)dt = \int\limits_c^y dt \int\limits_a^b g(x,t)dx = \int\limits_c^y G(t)dt$

ч.т.д.

... $g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), G(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \Rightarrow$ по лемме

$\int\limits_a^y G(t)dt \overset{\text{непр. по T1}}{=} \int\limits_a^b dx \int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt = \int\limits_a^b dx(f(x,y) - f(x,c)) = F(y) - F(c)$

Из 1-го курса $\left(\int\limits_c^y G(t)dt\right)' = G'(y) \Rightarrow F'(y) = (F(y) - F(c))' = G'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$

ч.т.д.

Общий случай: $I(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx(3)$

Теорема 3: *(непр-ть)* Пусть $f \in C(\Pi)$, $\Pi = [a,b] \times [c,d]$, $\alpha, \beta \in C[c,d]$, $a \leq \alpha(y)$, $\beta(y) \leq b$, $\forall y \in [c,d]$ Тогда $I \in C[c,d]$

Доказательство:$\forall y_0 \in [c,d]$ Покажем, что $\exists \lim\limits_{y \to y_0} I(y) = I(y_0)$

$I(y) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,y)dx = I_1(y) + I_2(y) - I_3(y)$

По теореме 1 $I_1(y) \in C[c,d] \Rightarrow \lim\limits_{y \to y_0} I_1(y) = I_1(y_0) = I(y_0)$

$I_2(y) \overset{\text{по Т. о ср. знач.}}{=} f(\xi_y, y)(\beta(y) - \beta(y_0))$, ξ_y между $\beta(y_0)$ и $\beta(y)$

$y \to y_0$, $\xi_y \to \beta(y_0)$, $\lim\limits_{y \to y_0} I_2(y) = f(\beta(y_0), y_0) \cdot 0 = 0$, аналог. $\lim\limits_{y \to y_0} I_3(y) = 0$

Окончательно: $\lim\limits_{y \to y_0} I(y) = I(y_0) + 0 - 0 = I(y_0)$

ч.т.д.

Теорема 4: *(о диф.)* Пусть $f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C(\Pi)$, $\alpha(y)$, $\beta(y)$ диф. на $[c,d], \forall y \in [c,d]$ $a \leq \alpha(y)$, $\beta(y) \leq b$

$$I'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y)$$

Доказательство: $\forall y_0 \in [c,d]$ По Т.2 $I_1'(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \left.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|_{y_0} dx$

Покажем, что $I_2'(y_0) = f(\beta(y_0),y_0)\beta'(y_0)$ (анал. $I_3'(y_0) = f(\alpha(y_0),y_0)\alpha'(y_0)$)

ξ_y между $\beta(y_0)$ и $\beta(y)$, $\xi_y \to \beta(y_0)$, $y \to y_0$

$\frac{I_2(y) - I_2(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0} I_2(y) \overset{\text{ф. ср. зн.}}{=} \frac{1}{y - y_0} f(\xi_y, y)(\beta(y) - \beta(y_0)) \xrightarrow[y \to y_0]{} f(\beta(y_0), y_0)\beta'(y_0)$

ч.т.д.

2. Признаки равномерной сходимости несобственных ИЗП (Вейерштрасса, Дирихле-Абеля, Дини).

$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = I(y)$ - несобств. интеграл 1-го рода (1)

$\left(\int\limits_{-\infty}^a f(x,y)dx, \int\limits_{-\infty}^\infty f(x,y)dx = \int\limits_{-\infty}^a + \int\limits_a^\infty\right)$

$\int\limits_a^b f(x,y)dx\ \forall y \in Y\ \forall \beta \in [a,b) :\ \int\limits_a^\beta f(x,y)dx$ - с. - н.с. 2-го рода (2)

Функциональные свойства:

$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = I(y), \quad f \in C[a,\infty) \times [c,d]$

$I(y) = \lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{\int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx}_{\text{каждый инт. собств.}=\varphi_n(y) \in C[c,d]}$

Опр. 1 Пусть f(x,y) опред. на $[a,\infty) \times Y$, (1) *сход. равн.* на Y, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists R(\varepsilon) \geqslant a :\ \forall R \geqslant R(\varepsilon), \forall y \in Y\ \left|\int\limits_R^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Опр. 1' Пусть f(x,y) опред. на $[a,\infty) \times Y$, (1) *сход. равн.* на Y, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \beta(\varepsilon) \in [a,b) :\ \forall p \in [\beta(\varepsilon), b)\ \forall y \in Y\ \left|\int\limits_p^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Критерий Коши

(1) сход. равн. на $Y \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists R(\varepsilon) \geqslant a :\ \forall R', R'' \geqslant R(\varepsilon)\ \forall y \in Y :\ \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon\ \textbf{(*)}$$

(1') сход равн. на $Y \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \beta(\varepsilon) \in [a,b) :\ \forall p', p'' \in [\beta(\varepsilon), b)\ \forall y \in Y :\ \left|\int\limits_{p'}^{p''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

Доказательство для 1

$\Rightarrow$ **(1)** сход. равном. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists R(\varepsilon) \geqslant a :\ \forall \rho \geqslant R(\varepsilon)\ \forall y \in Y \Rightarrow \left|\int\limits_\rho^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall R', R'' \geqslant R(\varepsilon) \Rightarrow \left|\int\limits_{R'}^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\left|\int\limits_{R''}^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_{R'}^\infty f(x,y)dx - \int\limits_{R''}^\infty f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow$ справедливо **(*)** □

$\Leftarrow$ $\forall$ фикс. $y \in Y$ сход. $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ (несобств. 1-го рода) по кр. Коши

в **(*)** устремл. $R' \to +\infty\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists R(\varepsilon) :$

$\forall R' \geqslant R(\varepsilon)\ \forall y \in Y$ выполн. $\left|\int\limits_{R'}^\infty f(x,y)dx\right| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon \Rightarrow$ **(1)** сход. равном. □

Признаки равн. сход. н.с. инт. завис. от параметра

Пр. Вейерштрасса: Если сущ. $\varphi(x) :\ |f(x,y)| < \varphi(x)\ \forall y \in Y$, $\forall x \geqslant a$, $\varphi \in R[a,\rho]\ \forall \rho \geqslant a$, и сход. $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$, то **(1)** сход. равн. на Y.

Если сущ. $\varphi(x) :\ |f(x,y)| \leqslant \varphi(X)\ \forall y \in Y\ \forall x \in [a,b)$, $\varphi \in R[a,\rho]\ \forall \rho \in [a,b)$ и сход. $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$, то **(1')** сход. равн. на Y.

Д-во для (1): Критерий Коши сход. $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx\ \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists R(\varepsilon) \geqslant a :\ \forall R', R'' \geqslant R(\varepsilon)$ вып. $\left|\int\limits_{R'}^{R''} \varphi(x)dx\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall y \in Y\ \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} |f(x,y)|\, dx \leqslant \int\limits_{R'}^{R''} \varphi(x)dx < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **(1)** сх. равн. по кр. Коши □

Формула Бонне: $f(x) \in R[\alpha,\beta], g(x)$ - монот. на $[\alpha,\beta]\ \Rightarrow$

$\exists \zeta \in [\alpha,\beta] :\ \int\limits_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = g(\alpha+0)\int\limits_\alpha^\zeta f(x)dx + g(\beta-0)\int\limits_\zeta^\beta f(x)dx$

Пр. Дирихле-Абеля:

$\exists \forall y \in Y\ \forall \rho \geqslant a\ f(x,y) \in R[a,\rho], g(x,y)$ - монот. на $[a,\rho]$

Для равном. сход. **(2)** $\int\limits_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ достаточно выполнения одной из пар:

I $\begin{cases} \text{а) } \exists M > 0 :\ \forall R', R'' \geqslant a\ \forall y \in Y\ \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| < M \\ \text{б) } \forall \varepsilon > 0\ \exists R(\varepsilon) > a :\ \forall x \geqslant R(\varepsilon)\ \forall y \in Y\ \ |g(x,y)| < \varepsilon \end{cases}$

II $\begin{cases} \text{а) } \int\limits_a^\infty f(x,y)dx \text{ - сход. равн. на } Y \\ \text{б) } \exists M > 0 :\ \forall x \geqslant a\ \forall y \in Y\ \ |g(x,y)| < M \end{cases}$

Д-во: Формула Бонне: $\forall R'' \geqslant R' \geqslant a\ \exists \zeta_y \in [R', R''] :$

$\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)g(x,y)dx = g(R'+0,y)\int\limits_{R'}^{\zeta_y} f(x,y)dx + g(R''-0,y)\int\limits_{\zeta_y}^{R''} f(x,y)dx$

I: из **б)** $\forall \varepsilon > 0\ \exists R(\varepsilon) \geqslant a :\ \forall x \geqslant R(\varepsilon)\ \forall y \in Y\ \ |g(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow$ $\forall R', R'' \geqslant R(\varepsilon)$ из ф-лы Бонне

$\left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)g(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M = \varepsilon \Rightarrow$ **(2)** сх. равн. на Y по кр. Коши □

II: из **а)** $\forall \varepsilon > 0\ \exists R(\varepsilon) :\ \forall R', R'' \geqslant R(\varepsilon)\ \forall y \in Y\ \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$\left\{ R' \leqslant \zeta_y \leqslant R'' \Rightarrow \int\limits_{R'}^{\zeta_y} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2M}, \int\limits_{\zeta_y}^{R''} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{2M} \right\} \Rightarrow$

из ф-лы Бонне $\forall R', R'' \geqslant R(\varepsilon)\ \forall y \in Y \Rightarrow \left|\int\limits_{R'}^{R''} f(x,y)g(x,y)dx\right| <$

$< M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \Rightarrow$ **(2)** сх. равн. по кр. Коши □

Признак Дини: $\exists f(x,y)$ непр. и неотриц. на $[a,\infty) \times [c,d]$ и $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx = I(y)$, $y \in [c,d]$, причём $I \in C[c,d] \Rightarrow$ интеграл сх. равн. на $[c,d]$

Д-во:

$\varphi_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx$ $Y = [c,d] \Rightarrow$
1. Y - компакт
2. $\varphi_n \in C(Y)$
3. $I(y) \in C(Y)$
4. $f \geqslant 0 \Rightarrow \forall y \in Y \{\varphi_n(y)\}$ неубыв.

$\Rightarrow$ из пр. Дини для функц. посл. $\varphi_n \underset{[c,d]}{\rightrightarrows} I \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n \geqslant N(\varepsilon)\ \forall y \in [c,d]\ \ |I(y) - \varphi_n(y)| = \int\limits_{a+n}^\infty f(x,y)dx < \varepsilon \Rightarrow \int\limits_{a+N(\varepsilon)}^\infty f(x,y)dx < \varepsilon$

$R(\varepsilon) = a + N(\varepsilon)$, т.к. $f \geqslant 0 \Rightarrow \forall R \geqslant R(\varepsilon)\ \forall y \in Y :\ \int\limits_R^\infty f(x,y)dx \leqslant \int\limits_{R(\varepsilon)=a+N(\varepsilon)}^\infty f(x,y)dx < \varepsilon \Rightarrow \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ - сх. равн. на $[c,d]$ □

3. Непрерывность и интегрируемость несобственных ИЗП на отрезке.

Непрерывность несобственного ИЗП на отрезке:

Лемма 1: Пусть $f \in C(\Pi)$. Тогда $F \in C[c,d]$

Доказательство: Т.к. П - компакт, то f равн. непр. на П $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall y_1, y_2 \in [c,d]\ |y_2 - y_1| < \delta\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f(x,y_2) - f(x,y_1)| < \frac{E}{(b-a)}$

$|F(y_2 - F(y_1))| = \left|\int\limits_a^b (f(x,y_2) - f(x,y_1))dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x,y_2) - f(x,y_1))|dx < \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{(b-a)}dx = \varepsilon \Rightarrow F$ равн. непр. на $[c,d] \Rightarrow$ F непр. на $[c,d]$

ч.т.д.

Вспомогат. лемма: Пусть $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сх. равномерно на Y

$$\Rightarrow \forall \{a_n\} : a_n \gg a, \lim_{n \to \infty} a_n = +\infty,$$

послед. $U_n(y) = \int\limits_a^{a_n} f(x,y)dx$ сх. равн. к $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ на Y

Доказательство леммы:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists R(\varepsilon) \gg a : \forall \rho \gg R(\varepsilon), \forall y \in Y \left|\int\limits_\rho^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon$

Т.к. $a_n \to \infty$, то $\exists N(\varepsilon) :$ При$a_n \gg R(\varepsilon), \forall n \gg N$

$|I(y) - U_n(y)| = \left|\int\limits_{a_n}^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon,$ при$\forall y \in Y \Rightarrow U_n \underset{Y}{\rightrightarrows} I$, ч.т.д

Теорема о непр. несобств. ИЗП:

Пусть $f(x,y) \in C[a,+\infty]$x$[c,d]$, $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ сх. равном. на Y

$\Rightarrow I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ - непрер по у на [c,d]

Док-во: $U_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx \underset{[c,d]}{\rightrightarrows} I(y)$

По Лемме 1 $U_n \in C[c,d], \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ по Теореме прошлого семестра $I(y) \in C[c,d]$ как предельн. ф-ция равн. сход. послед. непр. ф-ций, ч.т.д.

Интегрируемость несобств. ИЗП на отрезке

Теорема об инт. по отрезку: Пусть $f \in C[a,+\infty]$x$[c,d]$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \underset{[c,d]}{\rightrightarrows} I(y)$

$$\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d I(y)dy\ (**)$$

Док-во: Интеграл справа в (**) существует, т.к. $I \in C[c,d]$

Нужно док-ть, что $\lim\limits_{R \to \infty} \int\limits_a^R dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$

Из равн. сх-ти $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ на $[c,d] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists R(\varepsilon) : \forall R \geq R(\varepsilon)$ и $\forall y \in [c,d] \left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$

$\left|\int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^R dx \int\limits_c^d f(x,y)dy\right| =$

$= \left|\int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_c^d dy \int\limits_a^R f(x,y)dx\right| = \left|\int\limits_c^d dy \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\right| \leq$

$\int\limits_c^d dy \left|\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\right| \leq \{R \leq R(\varepsilon)\} \leq \int\limits_c^d \frac{\varepsilon}{d-c}dy = \varepsilon$, ч.т.д.

Следствие: Пусть f непр. и неотр. на $[a,+\infty)$x$[c,d], \forall y \in [c,d]$

Пусть $\exists \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = I(y)$, причем $I \in [c,d] \Rightarrow$ справедлива (**)

Док-во: По признаку Дини $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сх. равн. на [c,d], далее применим пеорему об инт. по отрезку, ч.т.д.

4. Дифференцируемость несобственных ИЗП.

Теорема: **(о диф-ти)** Пусть $f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ непр. на $[a,+\infty) \times [c,d]$, причём $\forall y \in [c,d]\ \exists \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = I(y)$,

$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ ср. равно на $[c,d] \Rightarrow I \in C'[c,d]$, $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ $(*)$

Доказательство: Достаточно док-ать (*), т.к. по Т. о непр-ти, интеграл в правой части (*) явл. непр. ф-й.

Пусть $\phi_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)dx \Rightarrow \forall y \in [c,d]\ \phi_n(y) \xrightarrow[n \to \infty]{} I(y)$

По Т. о диф. собств. интеграллов $\phi_n'(y) = \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$

По вспом. Лемме $\{\phi_n'(y)\}$ сх. равн. на [c, d] к $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$

По Т. о диф. функ. посл: $(\lim\limits_{n \to \infty} \phi_n(y))' = \lim\limits_{n \to \infty} \phi_n'(y)$, $y \in [c,d]$, т.е. $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$

ч.т.д.

5. Интегрируемость несобственных ИЗП на полупрямой.

Пусть $f(x,y)$ непр. и неотр. на $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$, $\forall\ y\geqslant c$

$\exists\ I(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx,\ \forall\ x\geqslant a\ \exists\ K(x)=\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy$, причем

$I\in C[c,+\infty),\ K\in C[a,+\infty)\Rightarrow$ если сх-ся один из $\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy$, $\int\limits_a^{+\infty} K(x)dx$, то сх-ся и второй, и $\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy=\int\limits_a^{+\infty} K(x)dx$ (т.е. $\int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int\limits_c^{+\infty} dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$)

Доказательство: Пусть сх. $\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy$. Достаточно показать, что

$\lim\limits_{p\to+\infty}\int\limits_a^p K(x)dx=\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy$ (сущ., т.к. K – непр)

$\int\limits_a^p K(x)dx=\int\limits_a^p dx\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy=\int\limits_c^{+\infty} dy\int\limits_a^p f(x,y)dx\Rightarrow$

$\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy-\int\limits_a^p K(x)dx=\int\limits_c^{+\infty} dy\int\limits_p^{+\infty} f(x,y)dx\geqslant 0$

$\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy$ сх-ся $\Rightarrow\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ R_1>c:\ \int\limits_{R_1}^{+\infty} I(y)dy<\frac{\varepsilon}{2}$

Т.к. $f(x,y)\geqslant 0,\ \forall\ p\geqslant a$

$\int\limits_{R_1}^{+\infty} I(y)dy=\int\limits_{R_1}^{+\infty} dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\geqslant\int\limits_{R_1}^{+\infty} dy\int\limits_p^{+\infty} f(x,y)dx$

$0\leqslant\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy-\int\limits_a^p K(x)dx=\int\limits_c^{+\infty} dy\int\limits_p^{+\infty} f(x,y)dx=\int\limits_c^{R_1} dy\int\limits_p^{+\infty} f(x,y)dx+\int\limits_{R_1}^{+\infty} dy\int\limits_p^{+\infty} f(x,y)dx<\frac{\varepsilon}{2}+\int\limits_c^{R_1} dy\int\limits_p^{+\infty} f(x,y)dx<$

$\{\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx$ сх. равн. на $[c,R_1]$ по призн. Дини, т.к. f непр. и неотриц., $I(y)$ непр.$\Rightarrow\ \exists\ R(\varepsilon)\geqslant a:\ \forall\ p\geqslant R(\varepsilon),\ \forall\ y\in[c,R_1]$ справедливо нер-во $\int\limits_p^{+\infty} f(x,y)dx<\frac{\varepsilon}{2(R_1-c)}\}$

$<\frac{\varepsilon}{2}+\int\limits_a^{+\infty} dy\frac{\varepsilon}{2(R_1-c)}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ч.т.д.

6. Вычисление интеграла Дирихле.

$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=I\leftarrow$ инт-л Дирихле $I(y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx,\ y\geq 0$

$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}e^{-xy},\ x>0\\ 1,\ x=0\end{cases}$ непр. при $x,y>0$

$\begin{matrix}U(x,y)=\frac{\sin x}{x}\\ V(x,y)=e^{-xy}\end{matrix}\Rightarrow\int\limits_0^{\infty}\underbrace{U(x,y)}_{\text{не зав. от } y}dx$ сх. равн. на $y\geq 0$

$V(x,y)$ монот. по x $\forall y\geq 0$, $|V(x,y)|\leq 1\Rightarrow\int\limits_0^{\infty} f(x,y)dx$ сх. равн. на $y\geq 0$, т.к. $f(x,y)$ непр. $\Rightarrow I(y)$ непр. на $[0,d]$ $\forall d>0\Rightarrow I\in C[0;+\infty)$ $\Rightarrow I=I(0)=\lim\limits_{y\to 0+0} I(y)$ $(\vee)$

Выч. $I(y)$ при $y>0$ $\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}-\sin x e^{-xy},\ x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$ непр. при $x,y\geq 0$

Рассмотрим $\forall 0<C_1\leq y\leq C_2<\infty\Rightarrow\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leq e^{-xC_1}$, $\int\limits_0^{\infty} e^{-C_1x}dx$ сх-ся $\Rightarrow\int\limits_0^{\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ сх-ся равн. на $[C_1,C_2]$

по признаку Дини $\Rightarrow$ по Т. о диф-ти $\forall y\in[C_1,C_2]$ $I'(y)=-\int\limits_0^{\infty}\sin x e^{-xy}dx$ $(*)$, т.к. $\forall\ 0<C_1<C_2\Rightarrow(*)$ справ. при $y>0$

$\int\limits_0^{\infty}(\sin x)e^{-xy}dx=\int\limits_0^{\infty}e^{-xy}d(-\cos x)=-(\cos x)e^{-xy}\Big|_0^{\infty}-\int\limits_0^{\infty}(-\cos x)(-y)e^{-xy}dx=1-y\int\limits_0^{\infty}(\cos x)e^{-xy}dx=1-y(\cancel{\sin x}\overset{0}{}e^{-xy}\Big|_0^{\infty}-\int\limits_0^{\infty}(\sin x)(-y)e^{-xy}dx)=1-y^2\int\limits_0^{\infty}(\sin x)e^{-xy}dx\Rightarrow\int\limits_0^{\infty}(\sin x)e^{-xy}dx=\frac{1}{1+y^2}\Rightarrow I'(y)=\frac{-1}{1+y^2}, y>0\Rightarrow I(y)=C-\operatorname{arctg} y,\ y>0$

Нахождение C

$|I(y)|\leq\{\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq 1\}\leq\int\limits_0^{\infty}e^{-xy}dx=-\frac{e^{-xy}}{y}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{y}\to 0, y\to+\infty\Rightarrow$

$\lim\limits_{y\to+\infty}(C-\operatorname{arctg} y)=0\Rightarrow C=\frac{\pi}{2};\ I(y)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} y,\ y>0$

Т.к. $\int\limits_0^{\infty} f(x,y)dx$ сх-ся равн. на $y\geq 0$, исп. $(\vee)\Rightarrow I=I(0)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} y\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

Разрывный множитель Дирихле

$F(\alpha)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}sgn\alpha\ \alpha>0,\ \alpha x=t\ F(\alpha)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin t}{\frac{t}{\alpha}}\frac{dt}{\alpha}=\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2},\ F(0)=0;\ F(-\alpha)=-I(\alpha)=-\frac{\pi}{2}$

7. Свойства Г-функции Эйлера.

$\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty}\underbrace{t^{x-1}e^{-t}}_{\text{g(x,t)}}dt$ - гамма-функция или интеграл Эйлера второго рода

1. Область существования:

- около 0 $g(x,t)\sim t^{x-1}$, интеграл сх-ся в 0 $\Leftrightarrow$ x>0
- на ∞-ти $\forall x\ \exists c>0(t^{x-1}<e^{t/2}, t\geq c\Rightarrow g(x,t)<e^{-t/2}, t\geq c\Rightarrow$ интеграл сх-ся на ∞-ти $\forall x\ \Rightarrow\Gamma$(x) опр. $\Leftrightarrow\ x>0$

2. Свойства Г(x):

1. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x), x>0$

   $\Gamma(x+1)=\int\limits_0^{+\infty}t^xe^{-t}dt=\int\limits_0^{+\infty}t^xd(-e^{-t})=\underbrace{-t^xe^{-t}\Big|_0^{+\infty}}_{=0}+\int\limits_0^{\infty}e^{-t}\underbrace{xt^{x-1}dt}_{dt^x}=x\Gamma(x)\Rightarrow$

   достаточно знать знач.$\Gamma(x), x\in(0;1]$
2. $\Gamma(1)=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=1$
3. $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\dots=n!\Gamma(1)=n!\Rightarrow\Gamma(n+1)=n!$
4. Формула дополнения: $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},\ x\in(0;1)$

3. Функцион. свойства Г(x), x>0:

1. Непрерывность:

   $\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=\underbrace{\int\limits_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt}_{I_1(x)}+\underbrace{\int\limits_1^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt}_{I_2(x)}$

   $\forall x>0\ \exists x\in(x_1,x_2),\ x_1>0$

   Покажем, что на $[x_1,x_2]$ $I_1(x)$ и $I_2(x)$ сх. равн.

   $t^{x-1}e^{-t}\leq t^{x_1-1}e^{-t},\ t\in[0;1]$
   $t^{x-1}e^{-t}\leq t^{x_2-1}e^{-t},\ t\in[1;+\infty]$

   Так как $\int\limits_0^1 t^{x_1-1}e^{-t}dt, \int\limits_1^{\infty}t^{x_2-1}e^{-t}dt$ сход. $\Rightarrow$
   $I_1(x)$ и $I_2(x)$ сх. равн. на $[x_1,x_2]$ по пр. Вейрштрасса

   $t^{x-1}e^{-t}\in C(0;1]\times[x_1,x_2]$ и $t^{x-1}e^{-t}\in C[1;+\infty)\times[x_1,x_2]\Rightarrow$ $I_1,I_2\in C[x_1,x_2]$ по теореме о непр.

   $\Rightarrow\Gamma\in C[x_1,x_2]\Rightarrow\Gamma$ непр. в точке x, так как x>0 - произв. $\Rightarrow$ $\Gamma\in C(0;+\infty)$
2. Дифференцируемость Г(x):

   $\frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}e^{-t})=t^{x-1}\ln te^{-t}$
   $\frac{\partial^k}{\partial x^k}(t^{x-1}e^{-t})=t^{x-1}\ln^k(t)e^{-t}$

   Покажем, что $\forall k\in\mathbb{N}$ сход. $\int\limits_0^{\infty}t^{x-1}|\ln^k t|e^{-t}dt$

   В нуле $\exists\delta:\ |\ln t|<t^{-\frac{x}{2k}},\ t\in(0;\delta),\ \delta\in(0;1)\Rightarrow$ $|t^{x-1}\ln^k te^{-t}|<t^{x-1}t^{-\frac{x}{2}}=t^{\frac{x}{2}-1}\Rightarrow\int\limits_0^{\infty}t^{\frac{x}{2}-1}dt$ сход.

   На бесконечности $\ln t<t,\ t\in[1;+\infty)$
   $t^{x-1}\ln^k te^{-t}\leq t^{x+k-1}e^{-t}<e^{-\frac{t}{2}}$

   Для достаточно больших t $\Rightarrow\int\limits_0^{\infty}|t^{x-1}\ln^k te^{-t}|dt$ сх-ся

   $\forall x>0,\ x\in(x_1,x_2),\ 0<x_1<x_2<+\infty$

   Покажем, что
   $\forall k\in\mathbb{N}\ \int\limits_0^1 t^{x-1}\ln^k te^{-t}dt,\ \int\limits_1^{\infty}t^{x-1}\ln^k te^{-t}dt$
   сх-ся равн. на $[x_1,x_2]$

   $\Rightarrow$ по индукции получим:$I_1^{(k)}(x)=\int\limits_0^1 t^{x-1}\ln^k te^{-t}dt,\ I_2^{(k)}(x)=\int\limits_1^{\infty}t^{x-1}\ln^k te^{-t}dt$

   $\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty}t^{x-1}\ln^k te^{-t}dt$, так как $x>0$ -произв. $\Rightarrow$ ф-ла справедлива $\forall x>0$

   По признаку Вейрштрасса: $x\in[x1,x2]\Rightarrow$

   $|t^{x-1}\ln^k te^{-t}|\leq t^{x_1-1}|\ln^k t|e^{-t},\ t\in[0;1]$

   $|t^{x-1}\ln^k te^{-t}|\leq t^{x_2-1}\ln^k te^{-t},\ t\in[1;\infty]$

   $\int\limits_0^1 t^{x_1-1}|\ln^k t|e^{-t}dt$ сх-ся
   $\int\limits_1^{\infty}t^{x_2-1}\ln^k te^{-t}dt$ сх-ся

   $\Rightarrow$ **Г(x) бесконечно диффиринцируема**

4. График Г(x):

$\Gamma''(x)=\int\limits_0^{\infty}t^{x-1}\ln^2 te^{-t}dt>0,\ x>0,\ \Gamma(1)=1,\ \Gamma(2)=1!=1$

$\Rightarrow\Gamma'(x)\nearrow,\ x\in(0,+\infty)$

$\Rightarrow\exists\xi\in(1;2)\ \Gamma'(\xi)=0$,
так как $\Gamma'(x)\nearrow$, то ξ - единст. нуль произв. Г'(x) $\Rightarrow$

$\Rightarrow\Gamma(x)\searrow,\ x\in(0,\xi)$,
$\Gamma(x)\nearrow,\ x\in(\xi,+\infty)$

$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0+0}\Gamma(x)=+\infty$

Так как $\Gamma(n+1)=n!\longrightarrow\infty$ при $n\to\infty$, $\Gamma(x)$ возр. при $x>\xi\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty$

8. Свойства B-функции Эйлера. Связь между эйлеровыми интегралами

B-интеграл Эйлера: $B(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, пусть $t^{x-1}(1-t)^{y-1}=f(x,y,t)$

Свойства:

1. Область существования:
   - около 0 $f(x,y,t)$ t^{x-1}, инт-л сх-ся $\Longleftrightarrow\ x>0$
   - около 1 $f(x,y,t)$ $(1-t)^{y-1}$, инт-л сх-ся $\Longleftrightarrow\ y>0$

   т.е. интеграл сх-ся $\Longleftrightarrow\ x>0, y>0$
2. Элемент. св-ва:
   - $B(x,y)=B(y,x)$ - симметрич. при $x,y>0$ (в инт-ле замена $\tau=1-t$)
   - $B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y)$, $B(x,y+1)=\frac{y}{x+y}B(x,y); x,y>0$

   Докажем первое, второе $\Rightarrow$ в силу симметрии:

   $B(x+1,y)=\int\limits_0^1 t^x(1-t)^{y-1}dt=\{t^x=t^{x-1}(1-(1-t))\}=$

   $=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt-\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^ydt=$

   $=B(x,y)-\int\limits_0^1(1-t)^yd\frac{t^x}{x}=$

   $=B(x,y)-(\underbrace{(1-t)^y\frac{t^x}{x}\Big|_0^1}_{=\ 0}+\int\limits_0^1\frac{t^x}{t}y(1-t)^{y-1}dy)=$

   $=B(x,y)-yB(x+1,y)=B(x+1,y)(1+\frac{y}{x})=B(x,y)$

   $B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q),\ B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q),\ p,q>0$

   $\Rightarrow$ достаточно знать знач. B(x,y) при $x,y\in(0;1]$
3. $B(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt=$

   $=\{t=\frac{u}{u+1}=1-\frac{1}{u+1},\ u\in(0;+\infty),\ dt=\frac{du}{(u+1)^2}\}=$

   $=\int\limits_0^{\infty}(\frac{u}{u+1})^{p-1}(\frac{1}{u+1})^{q-1}\frac{du}{(u+1)^2}=\int\limits_0^{\infty}\frac{u^{p-1}}{(u+1)^{p+q}}du$

   $B(x,y)=\int\limits_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}du,\ x,y>0$

Связь между Эйлеровыми интегралами:

Это выведение формулы $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, для $\alpha>0,\ \beta>0$

$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\{x=ut,\ u>0\}=u^{\alpha}\int\limits_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-ut}dt$

$B(\alpha,\beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\{x=\frac{t}{1+t}\}=\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt$

Сделаем замены в формуле $\Gamma(\alpha)$: Пусть $u\to 1+v,\alpha\to\alpha+\beta$,

$$\text{Тогда }\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+v)^{\alpha+\beta}}=\int\limits_0^{\infty}t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+v)t}dt$$

Умножим обе части на $v^{\alpha-1}$:

$$\Gamma(\alpha+\beta)\frac{v^{\alpha-1}}{(1-v)^{\alpha+\beta}}=\int\limits_0^{\infty}t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+v)t}v^{\alpha-1}dt$$

Предположим, что $\alpha>1,\beta>1$, рассм. в $t\gg 0, v\gg 0$ функцию

$$f(t,v)=t^{\alpha+\beta-1}v^{\alpha-1}e^{-(1+v)t},\ f(t,v)\gg 0 \text{ в этой обл.}$$

$$I(v)=\int\limits_0^{\infty}f(t,v)dt=\Gamma(\alpha+\beta)\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}$$

$$K(t)=\int\limits_0^{\infty}f(t,v)dv=t^{\alpha+\beta-1}e^{-t}\int\limits_0^{\infty}e^{-tv}v^{\alpha-1}dv=\Gamma(\alpha)t^{\beta-1}e^{-t}$$

При этом $I(v)\in C(v\gg 0), K(t)\in C(t\gg 0)$, и $\exists$ повт. инт-л
$\int\limits_0^{\infty}K(t)dt=\int\limits_0^{\infty}dt\int\limits_0^{\infty}f(t,v)dv=\int\limits_0^{\infty}\Gamma(\alpha)t^{\beta-1}e^{-t}dt=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$

Следовательно, т.к. $\exists$ оба инт-ла, то $\int\limits_0^{\infty}I(v)dv=\int\limits_0^{\infty}K(t)dt$, или

$\int\limits_0^{\infty}I(v)dv=\Gamma(\alpha+\beta)\int\limits_0^{\infty}\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}dv=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=\int\limits_0^{\infty}K(t)dt$

Восп. 3 свойством B-инт-в: $\int\limits_0^{\infty}\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}dv=B(\alpha,\beta)$, тогда

$$\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$$

Т.е., $\forall\ \alpha>1,\ \beta>1,\ \ B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma()\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

Докажем для $\alpha>0,\ \beta>0$: $B(\alpha+1,\beta+1)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$
$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\beta+1)=\beta\Gamma(\beta)$
$\Gamma(\alpha+\beta+2)=(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$
$B(\alpha+1,\beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}B(\alpha,\beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\frac{\beta}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$

Подставив эти выражения в формулу для $B(\alpha+1,\beta+1)$, получим:
$\forall\alpha>0,\beta>0,\ \ B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

9. Асимптотическая формула для функции $\Gamma(\lambda+1), \lambda \to +\infty$

$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}(1+\alpha(\lambda)), \quad \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\alpha(\lambda)=0,$

при $\lambda = n \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+\alpha_n), \quad \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ $\Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^{\infty} t^{\lambda}e^{-t}dt = \{t=\lambda(u+1), u \geqslant -1\} = \int\limits_0^{\infty}\lambda^{\lambda}(u+1)^{\lambda}e^{-\lambda}e^{-u\lambda}xdu = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\lambda\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-\lambda(u-\ln(u+1))\right)du =$

Рассм. тожд. $g(u) = u - \ln(u+1) =$

$g'(u) = 1 - \frac{1}{u+1} = \frac{u}{u+1} \Rightarrow$ единст. мин. при $u=0$

$g(0)=0, \quad \lim\limits_{u\to-1+0} g(u) = +\infty, \quad \lim\limits_{u\to+\infty} g(u) = +\infty$

Замена $g(u) = \frac{v^2}{2}, \quad v \in (-\infty,+\infty) \Rightarrow v = 2\sqrt{2g(u)}\operatorname{sgn} u$ - замена строго монот., $u \neq 0 \Rightarrow \exists v'(u) \neq 0$

Около нуля $\Rightarrow \quad g(u) = u - \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots\right) = \frac{u^2}{2}\underbrace{\left(1-\frac{2}{3}u+\dots\right)}_{\varphi(u)\text{- дифф. в } 0, \varphi(0)=1}$

$\frac{v^2}{2} = \frac{u^2}{2}\varphi(u) \Rightarrow v = u\sqrt{\varphi(u)} \Rightarrow v'_u = \sqrt{\varphi(0)} + 0 = 1 > 0$

$u - \ln(u+1) = \frac{v^2}{2} \Rightarrow \frac{u}{u+1}du = vdv$ **(*)** $\leftarrow$ продифф.

$\ln(u+1) = u - \frac{1}{(1+\theta u)}\frac{u^2}{2}$ $\leftarrow$ в Тейлора с ост. чл. в ф. Лагранжа

$u \in (-1,\infty), \ \theta \in (0,1) \Rightarrow 1+\theta u > 0$

$= \frac{u^2}{2(1+\theta u)^2} = \frac{v^2}{2} \Rightarrow v = \frac{u}{1+\theta u}$ **(**)**

$u \neq 0 \quad \frac{du}{dv} \overset{(*)}{=} v\left(\frac{u+1}{u}\right) = v\left(1+\frac{1}{u}\right) = \{\frac{1}{u} = \frac{1-\theta v}{v}$ из **(**)**$\} = v\left(1+\frac{1-\theta v}{v}\right) = v+1-\theta v$ **(***)**

При $n=0 \quad \frac{dv}{du} = 1 \Rightarrow \frac{du}{dv} = 1 \Rightarrow$ **(***)** оправданна

$= \{u = u(v)\} = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\lambda\frac{v^2}{2}\right)(1+(1-\theta)v)dv = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\lambda(I_1+I_2)$

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\lambda\frac{v^2}{2}\right)dv = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\underbrace{\left(v\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)}_{y}^2\right)d\left(v\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-y^2)dy = \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\sqrt{n}$$

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\lambda\frac{v^2}{2}\right)(1-\theta)v\,dv, \quad 1-\theta \in (0,1)$$

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\lambda\frac{v^2}{2}\right)|v|\,dv = 2\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-\lambda\frac{v^2}{2}\right)|v|\,dv = \frac{2}{\lambda}\int\limits_0^{+\infty}\exp\left(-\lambda\frac{v^2}{2}\right)d\lambda\frac{v^2}{2} = \frac{2}{\lambda}\left(-\exp\left(-\lambda\frac{v^2}{2}\right)\Big|_0^{+\infty}\right) = \frac{2}{\lambda} \Rightarrow$$

$\Rightarrow I_2 = \alpha(\lambda)I_1, \quad |\alpha(x)| \leqslant \frac{2}{\lambda}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\Pi 2}} = \sqrt{\frac{2}{\Pi x}} \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma(\lambda+1) = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}\lambda\sqrt{\frac{2\Pi}{\lambda}}(1+\alpha(\lambda)) = \sqrt{2\Pi x}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^{\lambda}(1+\alpha(\lambda))$

10. Ортонормированные системы. Задача о наилучшем приближении элемента евклидова пространства

Рассматриваем бесконечномерное линейное пространство (такое, что в нём найдется сколь угодно большой набор ЛНЗ векторов).
Определение: Линейное пространство L - евклидово, если задано скалярное произведение $(f,g)\ \forall f,g \in L$. Оно удовл. 4 аксиомам:
1. $(f,g) = (g,f)$
2. $(f+g,h) = (f,h)+(g,h)$
3. $\forall k \in \mathbb{R}\ (kf,g) = k(f,g)$
4. $\forall f \neq \theta\ (f,f) > 0,\ (\theta,\theta) = 0$

Пространство - почти евклидово, если 4ую аксиому заменить на $\forall f\ (f,f) \geq 0$. Пример такого простр. со скалярным произв. :

кусочно непрерывные функции на $[a,b]$, $(f(x),g(x)) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$

для кусочно непрерывных $(f(x),f(x)) = \int\limits_a^b f^2(x)dx = 0 \nRightarrow f(x) = 0$

Определение: Норма $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$
Свойства нормы выводятся из аксиом скалярного произв.:
1. $\forall f \neq \theta\ \|f\| > 0,\ \|\theta\| = 0$
2. $\forall k \in \mathbb{R}\ \|kf\| = |k|\cdot\|f\|$
3. $\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\|$
Для док-ва третьего используется нер-во КБШ: $(f,g)^2 \leq (f,f)(g,g)$
Док-во КБШ: $(kf-g,kf-g) = k^2(f,f) - 2k(f,g) + (g,g) \geq 0 \Leftrightarrow$ *дискриминант* $\leq 0 \Rightarrow 4(f,g)^2 - 4(f,f)(g,g) \leq 0 \Rightarrow$ КБШ

Пространство - почти нормированное, если 1ое свойство заменить на $\forall f\ \|f\| \geq 0$. Доказательства от этого не меняются.

Рассмотрим любую последовательность элементов (почти) евклидова простр. $\{\psi_k\}$. Она образует счётное множество.
Определение: $\{\psi_k\}$ - ортонормированная система, если её элементы попарно ортогональны, т.е. $(\psi_i,\psi_j) = 0$, и норма каждого эл-та $\|\psi_i\| = 1$.

Ряды Фурье

Возьмём любой вектор $f \in L$, ортонорм. систему $\{\psi_k\}$.
Определение: Рядом Фурье для вектора f по системе $\{\psi_k\}$ называется $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\psi_k, \quad f_k = (f,\psi_k)$.

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\psi_k$ - частичная сумма ряда Фурье

Теорема: Среди всевозможных лин. комбинаций вида $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k$, $c_k \in \mathbb{R}$ наименьшее отклонение по норме от вектора f имеет частичная сумма ряда.

Доказательство: $\|\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\|^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f, \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k - f\right) =$ $=$ *ортогональность* $\{\psi_k\} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2(\psi_k,\psi_k) - 2\sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f,\psi_k) + (f,f) =$ $= \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum\limits_{k=1}^{n} c_kf_k + \|f\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}(c_k-f_k)^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2$
Получили, что квадрат отклонения линейной комбинации от f равен $\sum\limits_{k=1}^{n}(c_k-f_k)^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2$. Видно, что это выражение является наименьшим при $c_k = f_k$.

ч.т.д.

Следствие: $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \|f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k\|^2$

А так же **тождество Бесселя**:

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2$$

И **неравенство Бесселя**: $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \|f\|^2$$

11. Замкнутость и полнота ортонормированных систем.

Определение: Линейное пространство L - евклидово, если задано скалярное произведение $(f,g)\ \forall f,g \in L$. Оно удовл. 4 аксиомам:
1. $(f,g) = (g,f)$
2. $(f+g,h) = (f,h)+(g,h)$
3. $\forall k \in \mathbb{R}\ (kf,g) = k(f,g)$
4. $\forall f \neq \theta\ (f,f) > 0,\ (\theta,\theta) = 0$

Лемма: В почти евклид. пр-ве выполн. нерав-во Коши-Б: $|(f,g)| \leq \sqrt{(f,f)(g,g)}$
Определение: Пусть L - почти евклидово пространство. Ортонорм. система $\{\psi_k\}$ назыв. замкнутой в L, если $\forall f \in L\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon),\ \exists C_1,...,C_N \in \mathbb{R}:\ \|f - \sum\limits_{k=1}^{N} C_k\psi_k\| < \varepsilon$

Утверждение 1: $f \in L$, L - почти евклидово, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k\psi_k$ - n-ая част. сумма ряда Фурье, $\{\psi_n\}$ - замкнута $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\|f - S_n\| = 0$
Доказательство: 1) Пусть ϕ_n - замкнутая $\Rightarrow$ из задачи о наилучшем приближении $\|f - \sum\limits_{k=1}^{N} f_k\psi_k\| \leq \|f - \sum\limits_{k=1}^{N} C_k\psi_k\| < \varepsilon \Rightarrow$

$\|f - \sum\limits_{k=1}^{N} f_k\psi_k\|^2 \overset{\text{т-во Бесселя}}{=} \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{N} f_k^2 < \varepsilon^2$

2) $\forall n \geq N:\ \|f - \sum\limits_{k=1}^{N} f_k\psi_k\|^2 \overset{\text{т.б.}}{=} \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{N} f_k^2 \leq \|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{N} f_k^2 < \varepsilon^2$

3) $\|f - S_n\| < \varepsilon\ \forall n \geq N$

ч.т.д.

Следствие: $\{\psi_n\}$ полна в L - евклидовом $\Leftrightarrow\ \forall f \in L,\ f \neq 0:\ \exists n \in \mathbb{N}:\ f_n = (f,\psi_n) \neq 0$
Утверждение 2: Если $\{\psi_n\}$ полна в евклидовом пр-ве L, то различные эл-ты пр-ва L имеют разные ряды Фур.
Доказательство: Пусть $f,g \in L,\ f \neq g \Rightarrow h = f - g \neq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}:\ (h,\psi_n) \neq 0 \Rightarrow (f,\psi_n) \neq (g,\psi_n)$

ч.т.д.

Теорема: Если L - евклидово праcтравнство, $\{\psi_n\}$ - замкнутая в L $\Rightarrow \{\psi_n\}$ - полна в L
Доказательство: 1) $f \in L:\ f \perp \psi_n,\ n \in \mathbb{N}$. Покажем, что $f = 0$

2) $\forall n \in \mathbb{N}:\ f_n = (f,\psi_n) = 0 \Rightarrow$ из рав-ва Парсеваля $\|f\|^2 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2 = 0 \overset{L-\text{евкл.}}{\Rightarrow} f = 0$

ч.т.д.

12. Теорема Фейера.

Используется: $\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n}(S_0 + S_1 + ... + S_{n-1}), n \in \mathbb{N}$
Утверждение: $f - 2\pi -$ периодична, интегр. по любому отрезку $\Rightarrow$

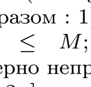
$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{sin^2\frac{nu}{2}}{2sin^2\frac{u}{2}}du.$

Доказательство: $\sigma_n(x,f) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{sin(k+\frac{1}{2})u}{2sin\frac{u}{2}}du = \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{sin(k+\frac{1}{2})u}{2sin\frac{u}{2}} =$ *** $\sum\limits_{k=0}^{n-1} sin(k+\frac{1}{2})u = \frac{1}{2sin(\frac{u}{2})}\sum\limits_{k=0}^{n-1} 2sin(k+\frac{1}{2})u \cdot sin(\frac{u}{2}) = \frac{1}{2sin(\frac{u}{2})}\sum\limits_{k=0}^{n-1} cos(k\frac{u}{2}) - cos(k+1)\frac{u}{2} = \frac{1}{2sin(\frac{u}{2})}(1 - cos(nu)) = \frac{2sin^2\frac{nu}{2}}{2sin\frac{u}{2}}$ *** $= \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{sin^2\frac{nu}{2}}{2sin^2\frac{u}{2}}du$

Замечание: $F_n(u) = \frac{1}{n}\frac{sin^2\frac{nu}{2}}{2sin^2\frac{u}{2}}$ - ядро Фейера, тогда

$\sigma_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+u)F_n(u)du$

Свойства: 1)$F_n(u) = F_n(-u)$
2)$F_n(u) \geq 0$
3)$f = 1 \Rightarrow S_0(x,1) = ... = S_{n-1}(x,1) = 1 \Rightarrow \sigma_n(x,1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(u)du = 1$

4)$\forall\delta \in (0,\pi):\ \lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} F_n(u) = 0$ 

Теорема Фейера: Пусть f непрерывна на $[-\pi,\pi], f(-\pi) = f(\pi)$.
Тогда $\sigma_n(x,f) \overset{[-\pi,\pi]}{\rightrightarrows} f$
Доказательство: Т.к. значения на концах совпадают - продолжим эту фун-ию на всю числовую прямую (она будет периодической) $\Rightarrow f \in C(\mathbb{R}), 2\pi$- периодична. Таким образом : 1)f ограничена на $\mathbb{R}$, т.е. $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{R} : |f(n)| \leq M$; 2)$f$ - непрерывна $\Rightarrow$ непрерывна на $[-2\pi,2\pi] \Rightarrow$ равномерно непрерывна на этом отрезке, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x',x'' \in [-2\pi,2\pi]$ таких что $|x'-x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Из 3-его свойства $\Rightarrow \forall x \in [-\pi,\pi]$:

$f(x) = f(x)\cdot 1 = f(x)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)F_n(t)dt$ откуда:

$\sigma_n(x,f) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)F_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+t) - f(x))F_n(t)dt = I_1 + I_2$, где:

$I_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}(f(x+t) - f(x))F_n(t)dt,$

$I_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi}(f(x+t) - f(x))F_n(t)dt$

1. $|I_1| \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}|f(x+t) - f(x)|F_n(t)dt < \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}F_n(t)dt \leq$

$\leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varepsilon}{2}F_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{2},\ \forall x \in [-\pi,\pi],\ \forall n \in \mathbb{N}$

2. $|I_2| \leq \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi}|f(x+t) - f(x)|F_n(t)dt \leq$

$\leq \frac{2M}{\pi}\sup\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} F_n(t)\cdot 2(\pi - \delta) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Т.е. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall x \in [-\pi,\pi]:\ I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Таким образом $|\sigma_n(x,f) - f(x)| \leq |I_1| + |I_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Замечание : Существует функция $f \in C[-\pi,\pi]$,
$f(-\pi) = f(\pi)$, но тригонометрический ряд Фурье для $f(x)$ расходится в некоторых точках $[-\pi,\pi]$

13. Замкнутость тригонометрической системы. Следствия из замкнутости. Теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции.

I Теорема Вейерштрасса: $f \in C[-\pi,\pi], f(-\pi) = f(\pi)$, Тогда f можно равномерно приблизить тригонометрическим многочленом, т. е. $\forall\varepsilon > 0 \exists T(x)$ - тригонометрический многочлен: $\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |T(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Доказательство: Следует из теоремы Фейера, т.к. $\sigma_n(x, f)$ - триг. мн-н. $n \in \mathbb{N}$

II Теорема Вейерштрасса: $f \in C[a, b]$, Тогда f можно равномерно приблизить обычным многочленом, т. е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists P(x)$ - произвольный многочлен: $\max\limits_{x\in[a,b]} |P(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Доказательство: 1). [a, b] = [-π, π], f(-π) = f(π) $\Rightarrow$ по 1-й теореме Вейерштрасса $\exists$ T(x) $= C_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(C'_k \cos kx + C''_k \sin kx)$: $|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in$ [-π, π]

$\forall k \in 1, ..., n\ \ \cos kx = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{l-1}(kx)^{2l}}{(2l)!}$, $\sin kx = \sum\limits_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{l-1}(kx)^{2l+1}}{(2l+1)!}$, $R = \infty \Rightarrow T(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $R = \infty$ (Сумма кон. числа ст. рядов) $\Rightarrow$ ст. ряд сх. равн. к T(x) на [-π, π] $\Rightarrow \exists N :\ |T(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in [-\pi,\pi]\ P(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow$ $|f(x) - P(x)| \le |f(x) - T(x)| + |T(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall x \in$ [-π, π]

2). [a, b] = [-π, π], f(-π) $\neq$ f(π)

g(x) = f(x) - $\mathscr{A}$x, g(-π) = g(π), т.е. f(-π) + $\mathscr{A}\pi$ = f(π) - Aπ $\Rightarrow$ A = $\frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi}$

Из 1). $\Rightarrow \exists\tilde{P}(x)-$ мн-н: |g(x) - $\hat{P}(x)$| $< \varepsilon\ \forall x \in$ [-π, π]

g(x) - $\hat{P}$(x) = f(x) - $\underbrace{(\mathscr{A}x + \hat{P}(x))}_{P(x)}$ = f(x) - P(x), P(x) = $\mathscr{A}$x + $\hat{P}(x)$ - мн-н.

3). [a, b] - произв. f $\in$ C[a, b]

x = αt + β: [-π, π] $\to$ [a, b]

$\begin{cases} -\alpha\pi\ + \beta = a \\ \alpha\pi\ + \beta = b \end{cases}\quad \beta = \frac{a+b}{2},\ \alpha = \frac{b-a}{2\pi} \neq 0$ ф-я мон. возр.

$\underbrace{f(x(t))}_{g(t)} \in$ C[-π, π] $\Rightarrow \exists Q(t)$ - мн-н: |g(t) - Q(t)| $< \varepsilon,\ \forall t \in$ [-π; π] x = αt + β $\Rightarrow$ t = $\frac{x-\beta}{\alpha}$

g(t(x)) = f(x), P(x) := Q($\frac{x-\beta}{\alpha}$) - мн-н $\Rightarrow \forall x \in [a,b]\ |g(t(x)) - Q(t(x))| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - P(x)| < \varepsilon$

ч.т.д.

Замеч: Если K-компакт в $\mathbb{R}^n$ и f $\in$ C(K), то $\forall\varepsilon > 0\ \exists$ P$(x_1, ..., x_n)$ - мн-н: |f$(x_1, ..., x_n)$ - P$(x_1, ..., x_n)$| $< \varepsilon\ \forall(x_1, ..., x_n) \in K$

Теорема: Тригонометрическая система замкнута в $L^2_R[-\pi,\pi]$ (тем более в $\hat{C}[-\pi,\pi]$), т. е. $\forall f \in \mathbb{R}[-\pi,\pi]\forall\varepsilon > 0\ \exists T(x)$ - тригонометрический многочлен: $||f - T|| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T(x))^2 dx} < \varepsilon$.

Доказательство:

Схема доказательства:

1. $\exists f_{\text{ступ}} \in \hat{C}[-\pi,\pi] : ||f - f\text{ступ}|| < \frac{\varepsilon}{3}$.
2. $\exists g \in C[-\pi,\pi], g(-\pi) = g(\pi) : ||g - f\text{ступ}|| < \frac{\varepsilon}{3}$.
3. $\exists T(x) : ||T - g|| < \frac{\varepsilon}{3}$.
4. Из 1-3 $\Rightarrow$ нерав. $\delta : ||f - T|| \le ||f - f_{\text{ступ}}|| + ||f_{\text{ступ}} - g|| + ||g - T|| < \varepsilon$.

Итак,

1. f $\in$ R[-π, π] $\Rightarrow$ f-огран: $\exists$ M > 0: |f(x)| $\le$ M, $x \in [-\pi,\pi]$

$\exists\tau :\ -\pi = x_0 < x_1 < ... < x_l = \pi : \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - S_r(f) < \frac{\varepsilon^2}{18M},\ S_r = \sum\limits_{k=1}^{l} m_k\delta x_k,\ m_k \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f$

$f_{\text{ступ}}(x) \le f(x),\ x \in (x_{k-1}, x_k), f_{\text{ступ}} \in \hat{C}[-\pi,\pi]$

а) $f_{\text{ступ}}(x) \le f(x), x \in [-\pi,\pi] \setminus \{x_1, ..., x_n\}$

б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\text{ступ}}(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{l}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f_{\text{ступ}}(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{l} m_k\delta x_k = S_\tau$

в) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_{\text{ст}}|dx \overset{\text{а}}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_{\text{ступ}})dx \overset{\text{б}}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - S_\tau(f) < \frac{\varepsilon^2}{18M}$

г) $|f(x) - f_{\text{ступ}}|^2 \le |f(x) - f_{\text{ступ}}|(|\overset{\le M}{f(x)}| + |\overset{\le M}{f_{\text{ступ}}}|) \le 2M|f(x) - f_{\text{ступ}}| \overset{2}{\Rightarrow} \|f(x) - f_{\text{ступ}}\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_{\text{ступ}})^2 dx} \overset{2}{\le} \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_{\text{ступ}}|dx\ 2M} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{18M}2M} = \frac{\varepsilon}{3}$

2. $\delta \ge 0$ маленькое

$Q = [x_0, x_0 + \delta] \cup [x_1 - \delta, x_1 + \delta] \cup ... \cup [x_{l-1} - \delta, x_{l-1} + \delta] \cup [x_l - \delta, x_l]$

$\begin{cases} g(x) = f_{\text{ступ}}(x),\ x \in [-\pi,\pi] \setminus Q \\ g(x) \text{ линейна на каждом отрезеке из Q} \end{cases}$

$g \in C[-\pi,\pi], g(-\pi) = g(\pi) = f_{\text{ступ}}(\pm\pi)$

$|g(x)| \le M$ по постр., $|Q| = \delta + (l-1)2\delta + \delta = 2; \delta$

$\|f_{\text{ступ}} - g\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_{\text{ст}} - g(x))^2 dx} = \sqrt{\int\limits_{Q} \underbrace{(f_{\text{ст}} - g(x))^2}_{\le M^2} dx} \le \sqrt{(2M)^2 \int\limits_{Q} dx} = 2M - \sqrt{2l\delta} < \frac{\varepsilon}{3}$ выполнено если $\delta < \frac{\varepsilon^2}{(6M)^2 2l}$

3. $g \in C[-\pi,\pi],\ g(-\pi) = g(\pi) \Rightarrow$ по 1-й теор. Вейерштрасса $\exists T(x) :\ |g(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}\ \forall x \in [-\pi,\pi] \Rightarrow \|g - T\| = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} (g(x) - T(x))^2 dx} < \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon^2}{9 \cdot 2\pi} dx} = \frac{\varepsilon}{3}$

ч.т.д.

14. Локальная теорема Фейера.

Пусть f - 2п-период, $f \in R[-\pi,\pi]$, $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \exists f(x_0 \neq 0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x_0, f) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$

Доказательство: f опр. на $[-\pi,\pi]$ как интегр. по Риману, f - 2п-пер. $\Rightarrow$ f - огр. на $\mathbb{R} \Rightarrow \exists M > 0 :\ \forall u \in \mathbb{R}|f(u)| < M$

$F_n -$ чётно $\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} F_n dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt$

$\overset{f\equiv1\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt=1}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x_0 + 0)F_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x_0 - 0)F_n(t)dt\ \ (\vee)$

$\sigma_n(x, f) - \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t)F_n(t)dt - (\vee) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(f(x_0+t)-f(x_0+0))F_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(f(x_0+t)-f(x_0-0))F_n(t)dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

$\exists f(x_0 \neq 0) \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \in (0,\pi) :\ |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| < \frac{\delta}{2},\ t \in (0;\delta) \\ |f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)| < \frac{\varepsilon}{2},\ t \in (-\delta;0) \end{aligned}\right.\quad (*)$$

$I_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}(f(x_0 + t) - f(x_0 + 0))F_n(t)dt$

$I_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} -//- dt$

$I_3 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{0}(f(x_0 + t) - f(x_0 - 0))F_n(t)dt$

$I_4 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta} -//- dt$

Оценим эти 4 интеграла:

$|I_1| \overset{(*)}{\le} \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}\frac{\varepsilon}{2}F_n(t)dt \le \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} F_n(t)dt}_{=\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

анал. $|I_3| \le \frac{\varepsilon}{4}$

В итоге: $\forall n \ge N\ |\sigma_n(x_0, f) - \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))| \le |I_1| + ... + |I_4| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$

ч.т.д.

Следствие: Если f удовл. услов. теор. Фейера и т.р. Фурье ф-ции f сход. в точке x_0, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0, f) = \frac{1}{2}|f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)|$

Доказательство: Из регул. мет. Чезаро

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x_0, f) = \lim_{n\to\infty} S_n(x_0, f)$$

15. Простейшие условия равномерной сходимости и почтенной дифференцируемости рядов Фурье.

Опр. f имеет кусочно непр. произв. на $[-\Pi,\Pi]$, если $f \in C[-\Pi,\Pi]$ и $\exists -\Pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = \Pi$: f диф. $\forall x \in [-\Pi,\Pi]/\{x_0, \ldots, x_l\}$, $\exists f'(x_{k-1} + 0)$, $\exists f'(x_k - 0)$, $f'(x) \in C([-\Pi,\Pi]/\{x_0, \ldots, x_l\})$

Т. о равн. сход. триг. р. Фурье: $\exists f \in C[-\Pi,\Pi]$, f имеет кус. непр. произв. на $[-\Pi,\Pi]$, $f(-\Pi) = f(\Pi)$,

$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ - триг. р. Фурье ф-ции $f(x)$,

$\frac{a'_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a'_k \cos kx + b'_k \sin kx)$ - т. р. Фурье ф-ции $f'(x)$,

доопред. произв. обр. в $\{x_0, \ldots, x_l\}$

Тогда: 1) т.р. Фурье ф-ции $f'(x)$ получен почл. диф-м т. р. Фурье ф-ции $f(x)$, т.е. $a'_0 = 0$, $a'_k \cos kx + b'_k \sin kx = (a_k \cos kx + b_k \sin kx)'$ ($\Leftrightarrow a'_k = kb_k, b'_k = -ka_k), k \in \mathbb{N}$

2) т.р. Фурье ф-ции $f(x)$ сход. равн. к $f(x)$ на $[-\Pi,\Pi]$

Д-во: 1) инт. по частям $a'_k = \frac{1}{\Pi}\int\limits_{-\Pi}^{\Pi} f'(x)\cos kx dx = \frac{1}{\Pi}\sum\limits_{j=1}^{l}\int\limits_{x}^{x_j} \cos kx\, df(x) =$

$= \sum\limits_{j=1}^{l}\left(\cos kx f(x)|_{x_{j-1}}^{x_j} - \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)(-k\sin kx)dx\right) =$

$\frac{1}{\Pi}\left(\underbrace{\left(f\underbrace{(\Pi)}_{x_l}\cos k\Pi - f\underbrace{(-\Pi)}_{x_0}\cos(-k\Pi)\right)}_{f(-\Pi)=f(\Pi)} \to 0 + k\int\limits_{-\Pi}^{\Pi} f(x)\sin kx\, dx\right) =$

$kb_k,\ a'_0 = 0,\quad$ анал. $b'_k = -ka_k$

2) Покажем р. сход. т. р. Фурье ф-ции $f(x)$: дост. пок-ть, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$ - сход. $\Rightarrow$ первон. ряд сход. равн. по пр. Вейерштрасса.

Из р-ва Парсеваля для $f'(x)$ след. сход. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}((a'_k)^2 + (b'_k)^2) \Rightarrow$ сход. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2)$

$|a_k| + |b_k| = \frac{1}{k}k|a_k| + \frac{1}{k}|b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + k^2a_k^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + k^2b_k^2\right) = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}k^2(a_k^2 + b_k^2) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ - сход., $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2)$ - сход. $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$ - сход. $\Rightarrow$ т. р. Фурье ф-ции $f(x)$ сход. на [-П, П] □

Замечание:$\exists f$ непр., имеет кус. непр. произв. на [-П, П], f(-П)=f(П) $\lim\limits_{k\to\infty} ka_k = \lim\limits_{k\to\infty} kb_k = 0$

Д-во: из д-ва 2) $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a'_k)^2 + (b'_k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}((ka_k)^2 + (kb_k)^2)$ сход. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ из необх. усл. сход. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a'_k)^2 + (b'_k)^2 = 0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{k\to\infty} ka_k = \lim\limits_{k\to\infty} kb_k = 0$ □

Т. (простейшие условия почл. дифф. т. р. Фурье):

$\exists f \in C^m$[-П,П], кусочно непр. произв. на [-П,П], причём $f(-\Pi) = f(\Pi),\ f'(-\Pi) = f'(\Pi),\ f^{(m)}(-\Pi) = f^{(m)}(\Pi)$

$\exists\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ - т. р. Фурье ф-ции $f(x)$

$\frac{a_0^j}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^j \cos kx + b_k^j \sin kx)$ - т. р. Фурье ф-ции $f^{(j)}(x)$, $1 \leqslant j \leqslant m+1$

Тогда: а) $a_0^j = 0$, $a_k^j \cos kx + b_k^j \sin kx = (a_k \cos kx + b_k \sin kx)^{(j)}$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. т. р. Фурье ф-ции $f^j(x)$ получ. j-кратн. почл. дифф. т. р. Фурье ф-ции $f(x)$

б) при $1 \leqslant j \leqslant m$ т. р. Фурье ф-ции $f^{(j)}(x)$ сход. равн. на [-П,П] к $f^j(x)$

Д-во: а) получ. индукцией из **1)** пред. теор.

б) получ. индукцией из **2)** пред. теор. □

16

Уточненные условия равномерной сходимости ТРФ

$\omega_{[a,b]}(f,\delta) = \sup\limits_{\substack{x_1,x_2\in[a,b]\\|x_1-x_2|<\delta}} |f(x_1)-f(x_2)|$ - модуль непрерывности f(x) на [a,b]

Определение. *f принадлежит на [a,b] к* ***классу Гельдера*** *порядка $\alpha(\alpha \in (0,1])$, (обозначется $f \in C^\alpha[a,b]$), если $\omega_{[a,b]}(f,\delta) = \underline{O}(\delta^\alpha)$.*

При $\alpha = 1$ означает липшицевость функции на $[a,b]$

Замечание: $f \in C^\alpha[a,b] \Rightarrow f \in C[a,b]$
Замечание: Если f дифференцируема на [a,b] и $f'(x)$ ограничена на [a,b], то $\alpha = 1$

Док-во: $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$
$|f(x_1)-f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1-x_2)| \le M(x_1-x_2) \le M\delta$, если $|x_1-x_2| \le \delta$

Теорема 15. *Пусть $f \in C^\alpha[-\pi,\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$.*

Тогда ТРФ f(x) равномерно сходится к f(x) на $[-\pi,\pi]$

Док-во: Периодически продолжаем функцию f на $\mathbb{R}$: $f(x+2\pi) = f(x)$.
По условию : $\exists c_1 : \omega_{[-\pi,\pi]}(f,\delta) \le c_1\delta^\alpha$, докажем : $\omega_{[-2\pi,2\pi]}(f,\delta) \le 2c_1\delta^\alpha$
$x_1,\, x_2 \in [-2\pi, 2\pi];\ |x_1-x_2| < \delta$

- Если $x_1,x_2 \in [-\pi,\pi] \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| < c_1\delta^\alpha$
- Если $x_1,x_2 \in [\pi,2\pi] \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| = |f(x_1-2\pi)-f(x_2-2\pi)| < c_1\delta^\alpha$
- Если $x_1,x_2 \in [-2\pi,-\pi] \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| = |f(x_1+2\pi)-f(x_2+2\pi)| < c_1\delta^\alpha$
- точка π- между x_1,x_2 :
  $|f(x_1)-f(x_2)| \le |f(x_1)-f(\pi)| + |f(\pi)-f(x_2)| \le c_1|x_1-\pi|^\alpha + c_1|\pi-x_2|^\alpha \le 2c_1\delta^\alpha$
- аналогично : точка $-\pi$- между x_1,x_2

$$S_n(f,x)-f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(t)dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}[f(x+t)-f(x)]D_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)D_n(t)dt - \frac{1}{\pi}f(x)\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} D_n(t)dt =$$

$$I_n^1(x) + I_n^2(x) - I_n^3(x),\ x \in [-\pi,\pi]$$

1. $|I_n^1(x)| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} 2c_1|t|^\alpha \frac{\pi}{2|t|}dt = 2c_1\frac{|\delta|^\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n, \forall x \in [-\pi,\pi]$[11]
   при $\delta(\varepsilon) \in (0,\pi)$: $\quad \frac{2c_1\delta^\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}$
2. По лемме перед принципом локализации $I_n^2 \overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$
3. По ней же $\int\limits_{\delta<|t|<\pi} D_n(t)dt \to 0$, $|f(x)| \le M$, т.к. f периодическая и интегрируемая
   $\Rightarrow |I_n^3| \le M|\int\limits_{\delta<|t|<\pi} D_n(t)dt| \to 0,\ I_n^3(x) \overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$
   $\Rightarrow \exists N(\varepsilon,\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon) : |I_n^2(x) - I_n^3(x)| \le \frac{2\varepsilon}{3} \quad \forall x \in R,\ \forall n \ge N(\varepsilon)$

Окончательно $\forall n \ge N(\varepsilon),\ \forall x \in [-\pi,\pi] \quad |f(x) - S_n(f,x)| < \varepsilon$ □

Определение. *Функция f называется* ***кусочно-гельдеровой*** *на $[-\pi,\pi]$, если $\exists\ -\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$, в точках $x_j\ \exists f(x_{j-1}+0),\ f(x_j-0),\ 1 \le j \le n$*

а функции $f_j(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (x_{j-1},x_j) \\ f(x_{j-1}+0) & x = x_{j-1} \\ f(x_j-0) & x = x_j \end{cases}$

удовлетворяют: $f_j \in C^{\alpha_j}[x_{j-1},x_j],\ \alpha_j \in (0,1],\ 1 \le j \le n$

Замечание: Положим $f(\pi) = f(-\pi)$ (меняя функцию f в одной точке). Это не изменит ряда Фурье. Продолжим f(x) периодически на $\mathbb{R}$.

$\begin{cases} x \in (x_{j-1},x_j) & f \text{ удовлетворяет условию Гельдера в точке } x \text{ порядка } \alpha_j \\ x = x_j\ (1 \le j \le n-1) & \text{усл. Гельдера в точке } x \text{ порядка } \alpha_{j+1} \text{ справа, } \alpha_j \text{ слева} \\ x = \pm\pi & \text{усл. Гельдера в точке } x \text{ порядка } \alpha_1 \text{ справа, } \alpha_n \text{ слева} \end{cases}$

$\Rightarrow$ ТРФ сходится в т. x_j к $\frac{1}{2}[f(x_j-0)+f(x_j+0)],\ 1 \le j \le n-1$,
в точках $x = \pm\pi$ к $\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]$, в остальных точках x к f(x)

Теорема 16. *f - кусочно-гельдерова, в обозначениях в определении: $[a,b] \subset (x_{j-1},x_j)$.*

Тогда ТРФ функции f(x) сходится равномерно к функции f(x) на [a,b]

Док-во: $\exists\delta > 0 \quad [a,b] \subset (x_j+2\delta, x_j-2\delta)$

введем $g(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in [x_{j-1}+\delta, x_j-\delta] \\ \text{линейна на } [-\pi,\ x_{j-1}+\delta], [x_j-\delta,\ \pi] \\ g(-\pi) = g(\pi) = 0 \end{cases}$

ТРФ функции g(x) сходится равномерно к g(x) по теореме 15
и применим к функциям $f_1 = g,\ f_2 = f$, следствие уточненной леммы Римана □

Лемма. *Пусть f - 2π-периодична, $f \in L_R^2[-\pi,\pi]$, $\delta \in (0,\pi)$.*

Тогда $C_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt \overset{x\in R}{\rightrightarrows} 0$

Лемма (Уточненная Римана).
Пусть f - 2π-периодична, $f \in L_R^2[-\pi,\pi]$, $\exists[a,b] : f_{[a,b]} \equiv 0$.

Тогда $\forall\,\delta \in (0, \frac{b-a}{2})$ ТРФ функции f(x) равномерно сх-ся к 0 на $[a+\delta, b-\delta]$.

17

Определение. *Функция f называется* ***кусочно-гельдеровой*** *на $[-\pi,\pi]$, если $\exists\ -\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$, в точках $x_j\ \exists f(x_{j-1}+0),\ f(x_j-0),\ 1 \le j \le n$*

а функции $f_j(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (x_{j-1},x_j) \\ f(x_{j-1}+0) & x = x_{j-1} \\ f(x_j-0) & x = x_j \end{cases}$

удовлетворяют: $f_j \in C^{\alpha_j}[x_{j-1},x_j],\ \alpha_j \in (0,1],\ 1 \le j \le n$

Замечание: Положим $f(\pi) = f(-\pi)$ (меняя функцию f в одной точке). Это не изменит ряда Фурье. Продолжим f(x) периодически на $\mathbb{R}$.

$\begin{cases} x \in (x_{j-1},x_j) & f \text{ удовлетворяет условию Гельдера в точке } x \text{ порядка } \alpha_j \\ x = x_j\ (1 \le j \le n-1) & \text{усл. Гельдера в точке } x \text{ порядка } \alpha_{j+1} \text{ справа, } \alpha_j \text{ слева} \\ x = \pm\pi & \text{усл. Гельдера в точке } x \text{ порядка } \alpha_1 \text{ справа, } \alpha_n \text{ слева} \end{cases}$

$\Rightarrow$ ТРФ сходится в т. x_j к $\frac{1}{2}[f(x_j-0)+f(x_j+0)],\ 1 \le j \le n-1$,
в точках $x = \pm\pi$ к $\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]$, в остальных точках x к f(x)

Теорема 16. *f - кусочно-гельдерова, в обозначениях в определении: $[a,b] \subset (x_{j-1},x_j)$.*

Тогда ТРФ функции f(x) сходится равномерно к функции f(x) на [a,b]

Док-во: $\exists\delta > 0 \quad [a,b] \subset (x_j+2\delta, x_j-2\delta)$

введем $g(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in [x_{j-1}+\delta, x_j-\delta] \\ \text{линейна на } [-\pi,\ x_{j-1}+\delta], [x_j-\delta,\ \pi] \\ g(-\pi) = g(\pi) = 0 \end{cases}$

ТРФ функции g(x) сходится равномерно к g(x) по теореме 15
и применим к функциям $f_1 = g,\ f_2 = f$, следствие уточненной леммы Римана □

Сходимость (и предел) ТРФ функции f(x) (f - 2π-периодична, f $\in L_R^2[-\pi,\pi]$) в точке x_0 зависят лишь от поведения функции f(x) в сколь угодно малой окрестности точки x_0.

Док-во:
$S_n(x_0,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x_0+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt + \mathrm{C}_n(x_0),\ \delta \in (0,\pi), \quad (\circledast)$
интеграл учитывает значения функции на $[x_0-\delta, x_0+\delta]$,
$\mathrm{C}_n(x_0) \overset{x_0\in R}{\rightrightarrows} 0$ - очевидно, не играет роли □

Определение. *f удовлетворяет в т.x_0* ***условию Гельдера*** *порядка $\alpha\ (\alpha \in (0,1])$ справа (слева), если $\exists f(x_0+0),\ \exists c_1,\delta_1 > 0 :\ |f(x_0+t)-f(x_0+0)| < c_1t^\alpha, t \in (0,\delta_1)$ (соответственно, $\exists f(x_0-0),\ \exists c_2,\delta_2 > 0 :\ |f(x_0+t)-f(x_0-0)| < c_2|t|^\alpha, t \in (-\delta_2,0)$.*

Теорема 14. *Если f - 2π-периодична, $f \in L_R^2[-\pi,\pi]$, в точке x_0 функция удовлетворяет условию Гельдера порядка α_1 справа и α_2 слева $(\alpha_1,\alpha_2 \in (0,1])$,*

тогда ТРФ функции f(x) сходится в точке x_0 к $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$

Док-во: Пусть $\alpha = \min(\alpha_1,\alpha_2)$
$\Rightarrow f$ удовлетворяет условию Гельдера порядка α в точке x_0 и справа, и слева.
Вспомним,что $D_n(t) \overset{def}{=} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}},\ D_n(-t) = D_n(t)$

$(\circledast) \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} D_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2}$

$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)dt,$

$$S_n(f,x) - \tfrac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)] =$$
$$= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)dt - \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x_0+0)D_n(t)dt - \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} f(x_0-0)D_n(t)dt =$$
$$= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}[f(x_0+t)-f(x_0+0)]D_n(t)dt + \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{0}[f(x_0+t)-f(x_0-0)]D_n(t)dt +$$
$$\{\text{проверьте!}\} + \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\le|t|\le\pi}\left(f(x+t) - \tfrac{[f(x_0+0)+f(x_0-0)]}{2}\right)D_n(t)dt = I_n^1 + I_n^2 + I_n^3$$

- $\sin\frac{t}{2} \ge \frac{t}{\pi}$,[10] $t \in [0,\pi]$. Оценим ядро Дирихле: $|D_n(t)| \le \dfrac{1}{2\frac{|t|}{\pi}} = \frac{\pi}{2|t|},\ t \in [-\pi,\pi]$
  Из условия Гельдера: $|I_1^n| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta} ct^\alpha\frac{\pi}{2|t|}dt = \frac{c}{2}\int\limits_{0}^{\delta} t^{\alpha-1}dt = \frac{c}{2}\frac{\delta^\alpha}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}$ при $\delta = \delta(\varepsilon)$
  Аналогично $|I_n^2| \le \frac{\varepsilon}{3}$ (для **всех** n , т.к. все зависящее от n, оценено 1)
- $I_n^3 \to 0$ по лемме перед принципом локализации,
  т.к. подынтегральная функция - 2π-периодична, $\in L_R^2[-\pi,\pi]$
  Значит, $\exists N(\varepsilon,\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon) :\ |I_n^3| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall n \ge N(\varepsilon)$

Значит: $\left|S_n(f,x) - \frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]\right| < \varepsilon,\ \forall n \ge N(\varepsilon)$ [

18. Принцип локализации Римана

Принцип локализации Римана: Сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ (такой что $f(x)$ 2π-периодична и $f(x) \in R[-\pi, \pi]$) в точке x зависит лишь от поведения функции f в сколь угодно малой окрестности этой точки.

Доказательство : Приведенную ниже ф-лу обозначим за **(1)**

$$S_n(x,f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\frac{sin(n+\frac{1}{2})t}{2sin\frac{t}{2}}dt + \cancelto{0}{c_n(x,\delta)},\ x+t \in [x-\delta, x+\delta]$$

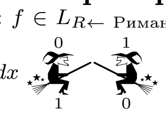
Лемма Римана : Пусть $f(x)$, удовлетворяет тем же условиям и $f(x) \equiv 0$, если $x \in [a,b]$. Тогда $\forall\delta \in (0, \frac{b-a}{2})$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится к 0 на $[a+\delta, b-\delta]$.

Доказательство : Возьмем в **(1)** $x \in [a+\delta, b-\delta]$, тогда первое слагаемое окажется равным 0, откуда $S_n(x,f) = c_n(x,\delta) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$

Следствие леммы Римана : Пусть f удовлетворяет все тем же условиям, $\exists[a,b] : f(x) = \phi(x),\ x \in [a,b]$. При этом тригонометрический ряд Фурье функции $\phi(x)$ сходится равномерно к $\phi(x)$ на $[a,b]$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на $[a+\delta, b-\delta],\ \delta \in (0, \frac{b-a}{2})$.

Доказательство : $S_n(x,f) = S_n(x,\phi) + S_n(x, f-\phi)$
При это в первом слагаемом $\phi(x) = f(x),$ а второе
$S_n(x, f-\phi) \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$ по лемме Римана.

19. Свойства преобразования Фурье.

Определение: $f \in L_{R\leftarrow \text{ Риман}}(-\infty;+\infty)$, если $f \in R[a,b]$ $\forall[a,b]$ и сход. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ 

Теорема *(опр. и св-ва преобр. Фурье)*: Пусть $f \in L_R(-\infty;+\infty) \Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt$ назыв. преобр. Фурье ф-ции f,

причём: 1) $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$
2) $\lim\limits_{x\to\infty}\hat{f}(x) = 0$

Доказательство: 1) $f(t)e^{-ixt} = f(t)\cos xt + if(t)\sin xt$ инт. по Риману на $\forall$ отрезке, $|f(t)e^{-ixt}| = |f(t)| \Rightarrow f(t)e^{-ixt}$ абс. инт. на $\mathbb{R} \Rightarrow \exists\hat{f}(x)$

$$\hat{f}(x_1) - \hat{f}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(e^{-ix_1t} - e^{-ix_2t})dt =$$

$$\{f \in L_R(-\infty;+\infty) \Rightarrow \exists\mathscr{A} > 0 : \int\limits_{-\infty}^{-A}|f(t)|dt + \int\limits_{A}^{+\infty}|f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int\limits_{|t|\geq A}\underbrace{f(t)(e^{-ix_1t} - e^{-ix_2t})dt}_{(*)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A} f(t)(e^{-ix_1t} - e^{-ix_2t})dt)$$

$$\leftarrow 1 : \left|\int\limits_{|t|\geq A}(*)\right| \leq \int\limits_{|t|\geq A}|f(t)||\underbrace{e^{-ix_1t} - e^{-ix_2t}}_{|\underbrace{e^{-ix_1t}}_{=1}|+|\underbrace{e^{-ix_2t}}_{=1}|}|dt \leq 2\int\limits_{|t|\geq A}|f(t)|dt$$

$$< \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\leftarrow 2 : \left|\int\limits_{-A}^{A}(*)\right| \leq \int\limits_{-A}^{+A}|f(t)||e^{-ix_1t} - e^{-ix_2t}|dt$$

$|e^{-ix_1t} - e^{-ix_2t}| = |e^{-ix_2t}(e^{-i(x_1-x_2)t} - 1)| = |e^{-i(x_1-x_2)t} - 1|$

e^z непр. в нуле $\Rightarrow \exists\delta > 0 :\ |e^z - 1| < \frac{\varepsilon}{3\int\limits_{-A}^{A}|f(t)|dt}$, если $|z| < \delta$

$\Rightarrow \forall x_1, x_2 :\ |x_1 - x_2| < \frac{\delta}{A} \Rightarrow |\hat{f}(x_1) - \hat{f}(x_2)| < \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{\varepsilon}{2\pi} < \varepsilon \Rightarrow \hat{f}$ равн. непр.

2) Покажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt = 0$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists A > 0 : \int\limits_{|t|\geq A}|f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \underbrace{\int\limits_{|t|\geq A} f(t)e^{-ixt}dt}_{(1)} + \underbrace{\int\limits_{-A}^{+A} f(t)e^{-ixt}dt}_{(2)}$$

$|(1)| \leq \int\limits_{|t|\geq A} f(t)dt < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall x;\ f \in R[-A;A] \Rightarrow \exists\tau :\ -\mathscr{A} = t_0 < t_1 < ... < t_n = \mathscr{A} :\ \int\limits_{-A}^{+A} f(t)dt - \overline{S}_r(f) < \frac{\varepsilon}{3}$, где $\overline{S}_r(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k;\ f_{\text{ст - ступен.}}(t) = m_k,\ t \in (t_{k-1}, t_k),\ f_{\text{ст}} \in \hat{C}[-A;A]$

$f_{\text{ст}}(t) \leq f(t),\ x \in [-A,A] \setminus \{t_0, ..., t_n\};\ \int\limits_{-A}^{+A} f_{\text{ст}}(t)\ dt = S_r(f) \Rightarrow$

$$\int\limits_{-A}^{+A}|f - f_{\text{ст}}|dt = \int\limits_{-A}^{+A}(f - f_{\text{ст}})dt = \int\limits_{-A}^{+A} fdt - S_r(f) < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$$

$$|(2)| = \left|\int\limits_{-A}^{+A}(f(t) - f_{\text{ст}}(t))e^{-ixt}dt + \int\limits_{-A}^{+A} f_{\text{ст}}(t)e^{-ixt}dt\right| \leq \int\limits_{-A}^{+A}|f - f_{\text{ст}}|dt + \left|\int\limits_{-A}^{+A} f_{\text{ст}}(t)e^{-ixt}dt\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \left|\int\limits_{-A}^{+A} f_{\text{ст}}e^{-ixt}dt\right|$$

$$\underbrace{\left|\int\limits_{-A}^{+A} f_{\text{ст}}(t)e^{-ixt}dt\right|}_{(3)} = \left|\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} m_k e^{-ixt}dt\right| =$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} m_k\frac{e^{-ixt_k} - e^{-ixt_{k-1}}}{-ix}dt\right| \leq \frac{2}{|x|}\sum_{k=1}^{n} m_k = \frac{const}{|x|} \overset{|x|\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow$$

$$\exists p > 0 :\ \text{при } |x| > p\ \ (3) < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right| < \varepsilon$$

ч.т.д.

Следствие: $f \in L_R(-\infty;+\infty)$, f принадлежит вещ. знач., то $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos txdt = \lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\sin txdt = 0$

Доказательство: $e^{-ixt}f(t) = f(t)\cos tx - if(t)\sin tx$

ч.т.д.

20. Условия разложимости функции в интеграл Фурье.

Опр. $\exists f \in L_R(-\infty, +\infty) \Rightarrow f$ разлож. в интеграл Фурье в точке x_0, если $\exists v.p\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(u)e^{ix_0u}du = \lim\limits_{A\to+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}\hat{f}(u)e^{ix_0u}du$

Теорема: $\exists f \in L_R(-\infty, \infty)$, f удовл. в точке x_0 усл. Гёльдера пор. α_1 справа, пор. α_2 слева, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1] \Rightarrow$

$$v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(u)e^{ix_0u}du = \frac{1}{2}\left(f(x_0+0) + f(x_0-0)\right)$$

Д-во: 1) $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}\hat{f}(u)e^{ix_0u}du}_{\textbf{(1)}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}dt$

$$\textbf{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}du\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ix_0u-iut}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int\limits_{-A}^{A}du\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iu(x_0-t)}dt}_{\textbf{(2)}} =$$

Из абс. сход. $\forall\varepsilon > 0\ \exists R > 0 : \forall R_1, R_2 \geqslant R\ \int\limits_{-\infty}^{-R_1}|f(t)|dt + \int\limits_{R_2}^{+\infty}|f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2A}$

$$\textbf{(2)} = \underbrace{\int_{-A}^{A}du\int\limits_{-R_1}^{R_2} f(t)e^{iu(x_0-t)}dt}_{\textbf{(3)}} +$$

$$+ \underbrace{\int\limits_{-A}^{A}du\left(\int\limits_{-\infty}^{-R_1} f(t)e^{iu(x_0-t)}dt + \int\limits_{R_2}^{+\infty} f(t)e^{iu(x_0-t)}dt\right)}_{\text{остаток}}$$

Оценим остаток: $|\text{остаток}| \leqslant \int\limits_{-A}^{A}du\left(\int\limits_{-\infty}^{-R_1}|f(t)|dt + \int\limits_{R_2}^{+\infty}|f(t)|dt\right) < \int\limits_{-A}^{A}du\frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon$

$$\textbf{(3)} = \int\limits_{-R_1}^{R_2}dt\int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{iu(x_0-t)}du \Rightarrow$$

$$\left|\int\limits_{-A}^{A}du\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iu(x_0-t)}dt - \int\limits_{-R_1}^{R_2}dt\int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{iu(x_0-t)}du\right| \leqslant$$

$|\text{остаток}| < \varepsilon \Rightarrow \int\limits_{-A}^{A}du\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iu(x_0-t)}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\int\limits_{-A}^{A} f(t)e^{iu(x_0-t)}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left.\frac{e^{iu(x_0-t)}}{i(x_0-t)}\right|_{-A}^{A}dt =$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{i(x_0-t)}\left(e^{iA(x_0-t)} - e^{-iA(x_0-t)}\right)dt =$$

$$= 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin{(x_0-t)A}}{x_0-t}dt \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{2\pi}2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dtd(t)\frac{\sin{(t-x_0)A}}{t-x_0} = \{t - x_0 = \tau\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau+x_0)\frac{\sin A\tau}{\tau}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}\hat{f}(u)e^{ix_0u}du}_{\textbf{(4)}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}dt$$

Условие Гельдера: $\exists C_1, C_2, \sigma_1, \sigma_2 > 0$:

$$|f(x_0+t) - f(x_0+0)| < \overbrace{C_1t^{\alpha_1}}^{<Ct^\alpha, t\in(0,\sigma)},\ t \in (0;\sigma_1)$$
$$|f(x_0+t) - f(x_0-0)| < \underbrace{C_2|t|^{\alpha_2}}_{<C|t|^\alpha, t\in(-\sigma,0)},\ t \in (-\sigma_2;0)$$

$\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2),\ C = \max(C_1, C_2)$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\sigma > 0,\ \sigma < \min(\sigma_1, \sigma_2, 1) :\ \frac{C\sigma^\alpha}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{4}$

$A > 0,\ \int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt = \int\limits_{-\infty} 0\frac{\sin At}{t}dt = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} =$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(x_0+0)\frac{\sin At}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} f(x_0-0)\frac{\sin At}{t}dt \Rightarrow$$

$\textbf{(4)} = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0)) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\sigma}(f(x_0+t) - f(x_0+0))\frac{\sin At}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(f(x_0+t) - f(x_0-0))\frac{\sin At}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geqslant\sigma} f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}dt - \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{\pi}\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt = I_1 + I_2 + I_3 - I_4$

$|I_1| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\sigma} Ct^\alpha\frac{1}{t}dt = \frac{C\sigma^\alpha}{\pi\alpha} < \frac{\varepsilon}{4}\ \forall A,$ анал. $|I_2| < \frac{\varepsilon}{4}\forall A$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0+t)}{t},\ |t| \geqslant \sigma,\ |g(t)| \leqslant \frac{1}{\sigma}|f(x_0+t)| \Rightarrow \\ \qquad g(t) \in L_R(-\infty, +\infty) \Rightarrow \text{по сл-ю} \\ 0,\ |t| < \sigma \end{cases}$$

$$\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)\sin Atdt = 0 \Rightarrow \exists\alpha_1 > 0 :\ \forall A \geqslant A_1\ |I_3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$\int\limits_{\sigma}^{+\infty}\frac{\sin At}{t}dt = \{At = x\} = \int\limits_{\substack{\sigma A\to\infty \\ A\to+\infty}}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx \xrightarrow{A\to+\infty} 0 \Rightarrow \exists A_2 > 0 :$ $\forall A \geqslant A_2\ |I_4| < \frac{\varepsilon}{4}$

Окончательно: $\forall A \geqslant \max(A_1, A_2)$:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}\hat{f}(u)e^{ix_0u}du - \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{4}\cdot 4 = \varepsilon \qquad \square$$

Замечание: $\hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt =$

$a(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt,\ b(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt,$

$a(-u) = a(u),\ b(-u) = b(u`)$

$= \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}(a(u) - ib(u))$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}\hat{f}(u)e^{ix_0u}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}(a(u) - ib(u))(\cos x_0u + i\sin x_0u)du =$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-A}^{A}\left(\underbrace{(a(u)\cos ux_0 + b(u)\sin ux_0)}_{\text{чётная}} + i\cancelto{0}{\underbrace{(a(u)\sin x_0u - b(u)\cos x_0u)}_{\text{нечетная}}}\right)du =$$

$\int\limits_{0}^{A}(a(u)\cos x_0u + b(u)\sin x_0u)du$ - аналог. $S_n(x_0, f)$

В условии пред. теор. $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2} =$

$$\int\limits_{0}^{\infty}(a(u)\cos x_0u + b(u)\sin x_0u)\,du$$